HEYNE <

*Das Buch*

*Mathe-Magie für Durchblicker* ist genau jenes Buch, das Sie sich in der Schulzeit gewünscht haben. Denn Arthur Benjamin zaubert ein wunderbares Bündel an ganz praktischen Beispielen und ihren mathematischen Kniffen aus dem Hut, sodass jeder Leser die Schönheit und Klarheit, ja die Magie der Mathematik erblicken kann: Anhand von Eislöffeln oder Pokerkarten, von Gebirgshöhen oder Zahlenquadraten lassen sich wie nebenbei Formeln und Gleichungen kennenlernen, die einst jeden Kopf zum Bersten brachten. Arthur Benjamin führt durch alle Gebiete der klassischen Mathematik – und plötzlich lässt sich sogar auf die Zahl Pi sprichwörtlich ein Reim machen oder werden die Fibonacci-Zahlen ein wahres Spielzeug der Fantasie. Wenn wir das nur auf der Schulbank schon gewusst hätten …

*Der Autor*

Arthur Benjamin ist Mathematikprofessor am Harvey Mudd College in Claremont, Kalifornien. Er arbeitet außerdem als professioneller Magier und zeigt sein Programm *Mathematik & Magie* überall auf der Welt. Sein erstes Buch *Mathe-Magie* war international ein Bestseller.

Arthur Benjamin

# MATHE MAGIE FÜR DURCHBLICKER

## DIE VERBLÜFFENDSTEN MATHE-TRICKS FÜR ALLE RECHENARTEN

Aus dem Amerikanischen
von Martin Bauer

WILHELM HEYNE VERLAG
MÜNCHEN

Die Originalausgabe erschien 2015 unter dem Titel *The Magic of Math*
bei Basic Books, a member of Perseus Books, New York.

Die Verlagsgruppe Random House weist ausdrücklich
darauf hin, dass im Text enthaltene externe Links vom Verlag nur bis zum
Zeitpunkt der Buchveröffentlichung eingesehen werden konnten. Auf spätere
Veränderungen hat der Verlag keinerlei Einfluss. Eine Haftung des Verlags
für externe Links ist stets ausgeschlossen.

MIX
Papier aus verantwortungsvollen Quellen
FSC® C014496
FSC www.fsc.org

Verlagsgruppe Random House FSC® N001967

Deutsche Erstausgabe 10/2016
Copyright © 2015 by Arthur Benjamin
Copyright © 2016 der deutschsprachigen Ausgabe
by Wilhelm Heyne Verlag, München,
in der Verlagsgruppe Random House GmbH,
Neumarkter Straße 28, 81673 München
Redaktion: Felix Peterhammer
Umschlaggestaltung: Hauptmann & Kompanie Werbeagentur, Zürich
Satz: Satzwerk Huber, Germering
Druck und Bindung: GGP Media GmbH, Pößneck
Printed in Germany 2016

ISBN 978-3-453-60393-6

www.heyne.de

# Inhalt

## Kapitel Null

# Einleitung

Zauberei fasziniert mich schon mein ganzes Leben. Egal, ob ich Zauberern zusah oder selbst Tricks vorführte, immer faszinierten mich die Methoden, mit denen man ein Publikum verblüffen und beeindrucken kann. Ich liebte es, die Geheimnisse dahinter zu erkunden. Anhand von ein paar einfachen Prinzipien konnte ich sogar eigene Tricks erfinden.

Die gleiche Erfahrung machte ich mit der Mathematik. Schon sehr früh erkannte ich die ganz eigene Magie von Zahlen. Hier ein Trick, der Ihnen gefallen könnte: Wählen Sie eine Zahl zwischen 20 und 100. Zählen Sie jetzt die einzelnen Ziffern zusammen. Ziehen Sie das Ergebnis von Ihrer Ausgangszahl ab. Und zählen Sie schließlich die Ziffern Ihres Ergebnisses zusammen. Lassen Sie mich raten: Lautet Ihr Endergebnis 9? (Wenn nicht, sollten Sie Ihre Berechnungen überprüfen.) Ziemlich cool, was?

In der Mathematik wimmelt es von Zaubereien wie dieser, doch in unserer Schulzeit erfahren wir nichts davon. In diesem Buch lernen Sie, welch hübsche Überraschungen in Zahlen, Figuren und reiner Logik stecken können. Und Sie brauchen nur ein wenig Algebra oder Geometrie, um die Geheimnisse hinter dieser Magie zu entdecken – und vielleicht sogar selbst interessante Zusammenhänge zu finden.

In diesem Buch behandle ich zentrale mathematische Themen: Zahlen, Algebra, Geometrie, Trigonometrie, Infinitesimalrechnung, aber auch Abseitigeres wie das pascalsche Dreieck, die Unendlichkeit, die magischen Eigenschaften von Zahlen wie

9, $\pi$, e, i, die Fibonacci-Zahlen und den goldenen Schnitt. Natürlich lassen sich die großen mathematischen Themen auf ein paar Dutzend Seiten nicht erschöpfend behandeln, aber ich hoffe, hinterher verstehen Sie die wichtigsten Konzepte, haben eine bessere Vorstellung davon, warum sie funktionieren, und haben die Eleganz und Bedeutung der einzelnen Bereiche zu schätzen gelernt. Selbst wenn Sie mit dem einen oder anderen Bereich bereits vertraut sind, sehen Sie ihn danach vielleicht mit anderen Augen. Je tiefer wir in die Mathematik eindringen, desto ausgeklügelter und faszinierender wird die Magie. Hier beispielsweise eine meiner Lieblingsgleichungen:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Göttlich, wie in dieser kurzen magischen Gleichung die vier wichtigsten Zahlen der Mathematik vereint sind! Konkret kommen 0 und 1 vor, die Basis der Arithmetik; $\pi = 3{,}14159...$, die wichtigste Zahl der Geometrie; $e = 2{,}71828$, die wichtigste Zahl der Infinitesimalrechnung; und i, eine imaginäre Zahl, deren Quadrat -1 ist. Mehr zu $\pi$ in Kapitel 8 und zu *i* und *e* in Kapitel 10. In Kapitel 11 stelle ich die Mathematik vor, die wir für das Verständnis dieser magischen Gleichung brauchen.

Dieses Buch ist gedacht für alle Menschen, die irgendwann einmal einen Mathekurs machen müssen, die gerade einen machen, und diejenigen, die alle Mathekurse ihres Lebens hinter sich haben. Anders ausgedrückt: Dieses Buch soll allen Spaß bringen, Mathe-Phobikern ebenso wie Mathe-Fans. Damit das gelingt, muss ich zuvor einige Regeln aufstellen.

**Regel 1: Sie dürfen alle grauen Kästen überspringen (außer diesem)!**

In jedem Kapitel finden Sie „Nebenbemerkungen“, in denen ich etwas Interessantes erzähle, das aber vom Thema wegführt. Vielleicht liefere ich ein weiteres Beispiel oder einen Beweis oder mache Anmerkungen, an denen fortgeschrittene Leser ihre Freude haben. Beim ersten Durchlesen des Buchs überspringen Sie diese Kästen vielleicht besser (und beim zweiten und dritten Lesen vielleicht auch). Und ich hoffe wirklich, Sie lesen dieses Buch mehrmals. Mathematik ist es wert, dass man sich immer wieder mit ihr beschäftigt!

**Regel 2: Überspringen Sie ruhig Absätze, Abschnitte oder ganze Kapitel.** Springen Sie einfach ein wenig vorwärts, wenn Sie stecken bleiben. Manchmal braucht man den Überblick über ein Thema, bevor man es ganz versteht. Sie werden erstaunt sein, wie viel leichter Ihnen das Verständnis fällt, wenn Sie später zu dem Thema zurückkehren. Es wäre jammerschade, wenn Sie mitten im Buch aufhören und all den Spaß verpassen würden, der weiter hinten auf Sie wartet.

**Regel 3: Überspringen Sie das letzte Kapitel nicht.** Das Schlusskapitel über die Mathematik des Unendlichen stellt etliche verblüffende Ideen vor, von denen Sie in der Schule nie etwas gehört haben. Und das Meiste beruht nicht auf den vorangegangenen Kapiteln. Umgekehrt nimmt das letzte Kapitel Ideen aus allen vorangegangenen Kapiteln wieder auf, was Sie vielleicht dazu ermuntert, diese Teile noch einmal zu lesen.

**Regel π: Erwarten Sie das Unerwartete.** Mathematik ist zwar ein richtig wichtiges Thema, aber deswegen muss sie noch lange nicht trocken und humorlos präsentiert werden. Als Matheprofessor am Harvey Mudd College kann ich mir gelegentliche Scherze, Witze, Lieder oder Zaubertricks nicht verkneifen, um meine Kurse – und dieses Buch hier – aufzulockern. Auf von mir gesungene Lieder müssen Sie bei diesem Buch allerdings verzichten. Glück gehabt!

Folgen Sie diesen Regeln und entdecken Sie die Magie der Mathematik!

# Kapitel eins

## 1 + 2 + 3 + 4 + … + 100 = 5050
# Die Magie der Zahlen

## Zahlenmuster

Die Erkundung der Mathematik beginnt mit Zahlen. Nachdem wir in der Schule zu zählen und Zahlen in Wörtern oder Ziffern oder physischen Objekten darzustellen gelernt haben, verbringen wir viele Jahre damit, mithilfe von Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und weiteren Rechenarten mit Zahlen zu jonglieren. Leider bekommen wir oft nicht gezeigt, dass Zahlen einen ganz eigenen Zauber haben, der uns bannen könnte, wenn wir nur unter die Oberfläche blicken könnten.

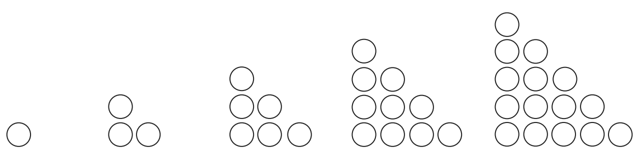
Beginnen wir mit einer Aufgabe, die Carl Friedrich Gauß als Schulbub gestellt bekam. Gauß' Lehrer trug der Klasse auf, alle Zahlen von 1 bis 100 zusammenzuzählen – eine mühselige Arbeit, die die Schüler eine Zeitlang beschäftigen sollte. Gauß verblüffte Lehrer und Mitschüler, indem er die Lösung sofort hinschrieb: 5050. Wie war er darauf gekommen? Gauß hatte sich die Zahlen 1 bis 100 in zwei Zeilen hingeschrieben vorgestellt: oben die Zahlen von 1 bis 50, darunter die Zahlen von 51 bis 100, allerdings *in umgekehrter Reihenfolge* (s. u.). Gauß erkannte, dass alle 50 Spalten jeweils 101 ergaben, die Gesamtsumme betrug also 50 x 101 gleich 5050.

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | … | 47 | 48 | 49 | 50 |
| + 100 | + 99 | + 98 | + 97 | … | + 54 | + 53 | + 52 | + 51 |
| 101 | 101 | 101 | 101 | … | 101 | 101 | 101 | 101 |

Die Zahlen von 1 bis 100 in zwei Zeilen notiert;
jede Spalte summiert sich zu 101.

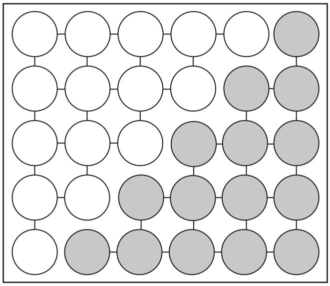
Gauß wuchs später zum größten Mathematiker des neunzehnten Jahrhunderts heran – aber nicht, weil er schnell im Kopf rechnete, sondern weil er es verstand, die Zahlen zum Tanzen zu bringen. In diesem Kapitel erkunden wir viele interessante Zahlenmuster und bekommen eine erste Ahnung davon, wie Zahlen tanzen. Einige dieser Muster helfen tatsächlich beim Kopfrechnen, andere sind einfach nur schön.

Gut, wir wissen nun dank Gauß, wie man die Zahlen von 1 bis 100 zusammenrechnet. Doch was ist, wenn wir alle Zahlen von 1 bis 17 oder bis 1000 oder bis 1.000.000 addieren wollen? Kein Problem, die Methode funktioniert auch in diesen Fällen. Nennen wir die Zahl, bis zu der wir addieren wollen, $n$. Dieses $n$ dürfen wir beliebig wählen. Manche Menschen finden Zahlen weniger abstrakt, wenn sie sie sich bildlich vorstellen können. Wir nennen die Zahlen 1, 3, 6, 10 und 15 Dreieckszahlen, da wir mit 1, 3, 6, 10, 15 usw. Punkten Dreiecke, wie unten gezeigt, bauen können. (Die 1 gilt hierbei auch als Dreieckszahl.) Die offizielle Definition lautet: Die $n$-te Dreieckszahl ist $1 + 2 + 3 + \ldots + n$.



Die ersten Dreieckszahlen sind 1, 3, 6, 10 und 15

Sehen Sie, was passiert, wenn man zwei Dreiecke wie unten abgebildet aneinanderlegt?



Wie viele Punkte befinden sich in dem Rechteck?

Da die zwei (identischen) Dreiecke ein Rechteck mit 5 Zeilen und 6 Spalten bilden, gibt es insgesamt 30 Punkte. Folglich musste jedes der Ausgangsdreiecke halb so viele Punkte haben, nämlich 15. Klar, das wussten wir schon, aber nach der gleichen Logik können wir verallgemeinern: Nimmt man zwei Dreiecke mit $n$ Zeilen und legt sie wie gezeigt aneinander, entsteht ein Rechteck mit $n$ Zeilen und $n + 1$ Spalten, das $n \times (n + 1)$ Punkte enthält (oder prägnanter: $n(n + 1)$). Damit haben wir die versprochene Formel für die **Summe der ersten n Zahlen** abgeleitet:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Haben Sie gemerkt, was wir soeben getan haben? Wir haben ein Muster erkannt (wie man die ersten 100 Zahlen addiert) und es auf alle anderen Aufgaben dieser Art übertragen. Müssten wir alle Zahlen von 1 bis 1.000.000 addieren, könnten wir das in zwei Schritten tun: Erst 1.000.000 mit 1.000.001 multiplizieren und das Ganze dann durch 2 teilen!

Hat man erst einmal eine Formel gefunden, ergeben sich daraus schnell weitere Formeln. Multiplizieren wir z. B. beide Seiten der obigen Gleichung mit 2, bekommen wir eine Formel für die **Summe der ersten *n* geraden Zahlen**:

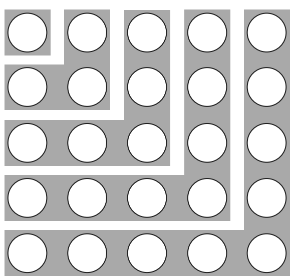
$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n + 1)$$

Und wie sieht es mit der **Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen** aus? Betrachten wir uns die Zahlen einmal:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+3 &= 4 \\ 1+3+5 &= 9 \\ 1+3+5+7 &= 16 \\ 1+3+5+7+9 &= 25 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Was ist die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen?

Rechts vom Gleichheitszeichen stehen lauter Quadratzahlen: $1 \times 1$, $2 \times 2$, $3 \times 3$ usw. Das Muster, das die Summe der ersten *n* ungeraden Zahlen $n \times n$ (meist $n^2$ geschrieben) sein könnte, springt sofort ins Auge. Doch wie können wir sicher sein, dass wir keinem Zufall aufsitzen? In Kapitel 6 stelle ich mehrere Methoden vor, um solche Zusammenhänge zu beweisen, aber ein so einfaches Muster sollte auch eine einfache Erklärung haben. Am besten nehme ich dazu wieder meine Punkte. Warum sollten sich die ersten fünf ungeraden Zahlen genau zu $5^2$ addieren? Betrachten Sie nun folgende Abbildung eines Quadrats mit Kantenlänge 5:



Wie viele Punkte befinden sich in dem Quadrat?

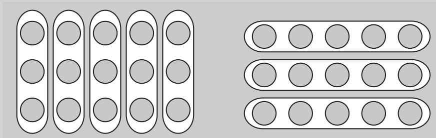
Dieses Quadrat hat $5 \times 5 = 25$ Punkte, doch zählen wir sie mal anders. Beginnen wir mit dem 1. Punkt in der oberen linken Ecke. An ihn grenzen 3 Punkte, dann 5 Punkte, dann 7 Punkte, dann 9 Punkte. Folglich gilt:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

Gehen wir allgemein von einem Quadrat mit Kantenlänge $n$ aus und teilen es in $n$ Regionen in Form umgedrehter Ls mit 1, 3, 5, … , $(2n - 1)$ Punkten auf. So bekommen wir eine Formel für die ersten $n$ ungeraden Zahlen:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2$$

**Nebenbemerkung**
Weiter hinten im Buch sehen wir, wie einfaches Punktezählen (und generell der Ansatz, Aufgaben auf zweierlei Weise anzugehen) selbst in der höheren Mathematik zu einigen interessanten Erkenntnissen führt. Manchmal werden einem damit ganz grundsätzliche Dinge klar. Zum Beispiel: Warum gilt eigentlich, dass $3 \times 5 = 5 \times 3$? Ich bin mir sicher, dass Sie diese Aussage nie hinterfragt haben, schließlich hat man Ihnen in der Schule erzählt, dass die Reihenfolge in Multiplikationen keine Rolle spielt. (Mathematiker nennen das „Kommutativität".) Aber warum sollten 3 Tüten mit je 5 Murmeln ebenso viele Murmeln enthalten wie 5 Tüten mit je 3 Murmeln? Die Erklärung dafür ist ganz einfach, wenn man die Punkte in einem Rechteck von 3 x 5 Punkten zählt. Zählt man zeilenweise, sieht man 3 Zeilen mit je 5 Punkten, also 3 x 5 Punkte. Zählt man hingegen spaltenweise, sieht man 5 Spalten mit je 3 Punkten, also 5 x 3 Punkte.



Warum ist 3 x 5 genau so viel wie 5 x 3?

Dieses Muster für die Summe ungerader Zahlen lässt sich in ein noch hübscheres Muster überführen. Ich habe versprochen, wir würden die Zahlen zum Tanzen bringen – und hier führen sie einen kleinen Square-Dance vor (engl. *square* heißt Quadrat).

Betrachten Sie diese interessante Pyramide von Gleichungen:

$$
\begin{array}{c}
1 + 2 = 3 \\
4 + 5 + 6 = 7 + 8 \\
9 + 10 + 11 + 12 = 13 + 14 + 15 \\
16 + 17 + 18 + 19 + 20 = 21 + 22 + 23 + 24 \\
25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 = 31 + 32 + 33 + 34 + 35 \\
\vdots
\end{array}
$$

Welches Muster erkennen Sie? Die Anzahl von Zahlen in jeder Zeile lässt sich einfach erkennen: 3, 5, 7, 9, 11 usw. Doch dann kommt ein unerwartetes Muster. Was ist die erste Zahl in jeder Zeile? 1, 4, 9, 16 und 25 – die Quadratzahlen. Wie kommt das?

Betrachten wir die fünfte Zeile. Wie viele Zahlen gibt es in dieser Zeile? In den Zeilen davor waren es 3, 5, 7 und 9. Zählt man das zusammen und fügt noch die 1 als erste ungerade Zahl hinzu, bekommt man die erste Zahl in Zeile 5: 25 bzw. $5^2$, die Summe der ersten 5 ungeraden Zahlen.

Überprüfen wir nun die fünfte Gleichung, allerdings ohne Zusammenzählen. Was würde Gauss tun? Vernachlässigen wir die 25 am Anfang der Zeile zunächst; dann stehen links noch 5

Zahlen, die jeweils um 5 kleiner sind als die dazugehörigen Zahlen auf der rechten Seite der Gleichung.

$$\begin{array}{cccccc} 25 & \phantom{-}26 & \phantom{-}27 & \phantom{-}28 & \phantom{-}29 & \phantom{-}30 \\ & -\ 31 & -\ 32 & -\ 33 & -\ 34 & -\ 35 \\ \cline{2-6} & -\ 5 & -\ 5 & -\ 5 & -\ 5 & -\ 5 \end{array}$$

Ein Vergleich der linken Seite von Zeile 5
mit der rechten Seite

Die fünf Zahlen rechts sind zusammen genommen um 25 größer als die dazugehörigen Zahlen auf der linken Seite. Folglich geht die Gleichung wie versprochen auf. Mit der gleichen Logik und ein wenig Algebra lässt sich zeigen, dass dieses Muster sich unendlich fortsetzt.

**Nebenbemerkung**

Hier die Algebra dahinter: Vor Zeile $n$ stehen $3 + 5 + 7 + \ldots + (2n - 1) = n^2 - 1$ Zahlen, folglich beginnt die linke Seite der Zeile mit der Zahl $n^2$, gefolgt von den nächsten $n$ Zahlen, $n^2 + 1$ bis $n^2 + n$. Auf der rechten Seite stehen die nächsten $n$ Zahlen, von $n^2 + n + 1$ bis $n^2 + 2n$. Ignorieren wir das $n^2$ auf der linken Seite einmal, sehen wir, dass die $n$ Zahlen rechts jeweils um $n$ größer sind als die dazugehörigen Zahlen auf der linken Seite, sodass die Differenz $n \times n$ entspricht, also $n^2$. Aber das wird vom $n^2$ ganz links in der Zeile ausgeglichen, sodass die Gleichung aufgeht.

Zeit für ein neues Muster: Wir haben gesehen, dass sich mit ungeraden Zahlen Quadrate bilden lassen. Schauen wir jetzt mal, was passiert, wenn wir alle ungeraden Zahlen in ein großes Dreieck packen.

Wir sehen, dass $3 + 5 = 8$, $7 + 9 + 11 = 27$, $13 + 15 + 17 + 19 = 64$. Und was haben die Zahlen 1, 8, 27 und 64 gemeinsam? Sie sind alles Kubikzahlen! Addiert man die fünf Zahlen in der fünften Zeile, bekommt man:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
&&&&1&&&&& = & 1 & = & 1^3 \\
&&&3&+&5&&&& = & 8 & = & 2^3 \\
&&7&+&9&+&11&&& = & 27 & = & 3^3 \\
&13&+&15&+&17&+&19&& = & 64 & = & 4^3 \\
21&+&23&+&25&+&27&+&29 & = & 125 & = & 5^3 \\
&&&&\vdots&&&&&& \vdots && \vdots
\end{array}$$

Ein gerades Dreieck aus ungeraden Zahlen

$$21 + 23 + 25 + 27 + 29 = 125 = 5 \times 5 \times 5 = 5^3$$

In der 1. Zeile beträgt die Summe also $1^3$, in der 2. Zeile $2^3$, in der 3. Zeile $3^3$ usw. Das Muster legt nahe, dass die Summe der Zahlen in der $n$-ten Zeile $n^3$ beträgt. Stimmt das generell, oder handelt es sich nur um einen seltsamen Zufall? Betrachten Sie mal die mittleren Zahlen in den Zeilen 1, 3 und 5. Was sehen Sie? Quadratzahlen. Die Zeilen 2 und 4 haben keine Zahlen genau in der Mitte, doch die jeweils angrenzenden Zahlen sind 3 und 5, mit dem Mittelwert 4, bzw. 15 und 17, mit dem Mittelwert 16. Sehen wir mal, wie wir dieses Muster ausnützen können.

Betrachten Sie erneut Zeile 5. Man kann sogar ohne jede Addition sehen, dass die Summe $5^3$ betragen muss, weil die fünf Zahlen auf der linken Seite symmetrisch um 25 herum liegen. Da der Mittelwert dieser fünf Zahlen $5^2$ ist, gilt für die Gesamtsumme $5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 + 5^2 = 5 \times 5^2 = 5^3$ . Ebenso ist der Mittelwert der 4 Zahlen in der vierten Zeile 16, also $4^2$, somit muss die Gesamtsumme $4^3$ sein. Mit ein bisschen Algebra lässt sich zeigen, dass der Mittelwert der $n$ Zahlen in der $n$-ten Zeile $n^2$ ist, weshalb die Gesamtsumme wie gewünscht $n^3$ sein muss.

Da wir schon bei Quadraten und Würfeln sind, kann ich nicht widerstehen, Ihnen ein weiteres Muster zu zeigen. Welche Gesamtsummen bekommt man, wenn man die Kubikzahlen, beginnend mit $1^3$, zusammenzählt?

$$
\begin{aligned}
1^3 &= 1 = \mathbf{1}^2 \\
1^3 + 2^3 &= 9 = \mathbf{3}^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 &= 36 = \mathbf{6}^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 &= 100 = \mathbf{10}^2 \\
1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 &= 225 = \mathbf{15}^2 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Die Summe der Kubikzahlen ist immer eine Quadratzahl.

Wenn wir die Kubikzahlen addieren, bekommen wir die Summen 1, 9, 36, 100, 225 usw. – lauter Quadratzahlen. Aber nicht irgendwelche Quadratzahlen, sondern die Quadrate von 1, 3, 6, 10, 15 usw. – lauter Dreieckszahlen. Weiter oben haben wir gesehen, dass diese die Summen von ganzen Zahlen waren, zum Beispiel:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 = 225 = 15^2 = (1 + 2 + 3 + 4 + 5)^2$$

Anders ausgedrückt: Die Summe der dritten Potenzen der ersten *n* Zahlen ist gleich dem Quadrat der Summe der ersten *n* Zahlen. Wir sind noch nicht ganz bereit dazu, dieses Ergebnis zu beweisen, aber in Kapitel 6 reiche ich zwei Beweise nach.

## Erste Kopfrechnungen

Manche Leute betrachten Zahlenmuster wie diese und sagen: „Okay, ganz hübsch. Aber wozu nützen sie?“ Die meisten Mathematiker würden wahrscheinlich wie Künstler indigniert antworten, hübsche Muster bräuchten keine weitere Rechtfertigung. Und je tiefer wir in sie eintauchen, desto mehr entfalten sie ihre Schönheit. Doch gelegentlich gibt es für die Muster auch ganz reale Anwendungsmöglichkeiten.

Hier ein einfaches Muster, das ich schon als Schuljunge entdeckte (wenn auch nicht als Erster). Ich betrachtete Zahlenpaare, die sich zu 20 addierten (wie 10 und 10, 9 und 11 usw.), und fragte mich, wie groß ihr Produkt maximal sein könnte. Offenbar wurde das Produkt maximal, wenn beide Zahlen gleich 10 waren. Die Werte sahen folgendermaßen aus:

| | Abstand von 100 |
|---|---|
| $10 \times 10 = 100$ | |
| $9 \times 11 = 99$ | 1 |
| $8 \times 12 = 96$ | 4 |
| $7 \times 13 = 91$ | 9 |
| $6 \times 14 = 84$ | 16 |
| $5 \times 15 = 75$ | 25 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Die Produkte der Zahlen,
die sich zu 20 addieren

Das Muster war unverkennbar: Je weiter die Zahlen auseinanderdrifteten, desto kleiner wurde ihr Produkt. Und um wie viel lag es unter 100? Um 1, 4, 9, 16, 25, … , also $1^2$, $2^2$, $3^2$, $4^2$, $5^2$ usw. Gilt dieses Schema immer? Ich probierte es aus, indem ich Zahlenpaare betrachtete, die sich zu 26 addieren.

| | Abstand von 169 |
|---|---|
| $13 \times 13 = 169$ | |
| $12 \times 14 = 168$ | 1 |
| $11 \times 15 = 165$ | 4 |
| $10 \times 16 = 160$ | 9 |
| $9 \times 17 = 153$ | 16 |
| $8 \times 18 = 144$ | 25 |
| $\vdots$ | $\vdots$ |

Die Produkte der Zahlen,
die sich zu 26 addieren

Wieder war das Produkt maximal, wenn die zwei Zahlen gleich groß waren, und von dort ausgehend sank es um 1, dann 4, dann 9 usw. Weitere Tests mit anderen Zahlen überzeugten mich davon, dass das Muster allgemein galt. (Die Algebra dahinter stelle ich später vor.) Und dann erkannte ich, wie mir dieses Muster dabei helfen konnte, Zahlen schneller zu quadrieren.

Angenommen, wir wollen 13 quadrieren. Anstatt $13 \times 13$ zu rechnen, könnten wir die einfachere Berechnung $10 \times 16$ durchführen. Jetzt haben wir die Lösung schon fast, aber weil wir um 3 nach unten bzw. oben gegangen sind, ist unsere Zahl um $3^2$ zu klein. Folglich gilt:

$$13^2 = (10 \times 16) + 3^2 = 160 + 9 = 169$$

Nehmen wir ein weiteres Beispiel. Versuchen wir, mit dieser Methode $98 \times 98$ zu rechnen. Dafür gehen wir 2 nach oben (100) und nach unten (96) und addieren $2^2$. Also:

$$98^2 = (100 \times 96) + 2^2 = 9600 + 4 = 9604$$

Das Quadrieren von Zahlen, die auf 5 enden, ist besonders einfach, weil man beim Hinauf- und beim Hinuntergehen zwei Mal Zahlen bekommt, die auf 0 enden. Beispielsweise:

$$35^2 = (40 \times 30) + 5^2 = 1200 + 25 = 1225$$
$$55^2 = (50 \times 60) + 5^2 = 3000 + 25 = 3025$$
$$85^2 = (90 \times 80) + 5^2 = 7200 + 25 = 7225$$

Versuchen Sie jetzt $59^2$. Sie gehen 1 nach oben und unten und bekommen $59^2 = (60 \text{ x } 58) + 1^2$. Doch wie rechnen Sie $60 \times 58$ im Kopf? Dazu nur vier Worte: von links nach rechts. Ignorieren wir die 0 und berechnen wir 6 x 58 von links nach rechts. $6 \times 50 = 300$ und $6 \times 8 = 48$. Zählen Sie diese Zahlen zusammen (von links nach rechts); Ergebnis 348. Folglich ist $60 \times 58 = 3480$ und so

$$59^2 = (60 \times 58) + 1^2 = 3480 + 1 = 3481$$

**Nebenbemerkung**

Hier die Algebra hinter dieser Methode. (Tipp: Lesen Sie diesen Kasten vielleicht erst, wenn Sie in Kapitel 2 mehr über die *Differenz von Quadraten* gelernt haben.)

$$A^2 = (A + d)\ (A - d) + d^2$$

wobei A die zu quadrierende Zahl ist und d die Distanz zur nächsten einfachen Zahl (wobei die Formel für jeden beliebigen Wert von *d* gilt). Beim Quadrieren von 59 beispielsweise ist A = 59 und d = 1, die Formel weist uns also an, $(59 + 1) \times (59 - 1) + 1^2$ zu rechnen, wie im obigen Beispiel.

Wenn Sie den Bogen bei zweistelligen Quadratzahlen raus haben, können Sie die gleiche Methode auch auf dreistellige Quadrate anwenden. Wenn Sie etwa wissen, dass $12^2 = 144$, dann rechnen Sie ganz einfach

$$112^2 = (100 \times 124) + 12^2 = 12.400 + 144 = 12.544$$

Eine ähnliche Methode lässt sich für die Multiplikation von Zahlen nahe 100 anwenden. Anfangs mag sie Ihnen wie reine Magie vorkommen. Betrachten Sie zum Beispiel 104 x 109. Neben jeder Zahl notieren wir (wie unten gezeigt) ihre Entfernung von 100. Jetzt zählen wir die erste Zahl zur zweiten Entfernungszahl. Hier wäre das 104 + 9 = 113. Dann multipliziert man die Entfernungen miteinander. Hier ist das 4 × 9 = 36. Schieben Sie diese Zahlen zusammen und wie durch Zauberhand erscheint die Lösung.

$$\begin{array}{rrl} & 104 & (4) \\ \times & 109 & (9) \\ \hline & 113 & 36 \end{array}$$

Eine magische Art, Zahlen nahe 100 miteinander zu multiplizieren ; hier: 104 x 109 = 11.336

Mehr Beispiele und die dahintersteckende Algebra stelle ich Ihnen in Kapitel 2 vor. Doch wenn wir schon dabei sind, lassen Sie mich ein paar Worte zum Thema »Kopfrechnen« sagen. In der Schule rechnen wir endlos mit Zettel und Stift, Kopfrechnen hingegen wird kaum gelehrt. Und doch rechnet man im Alltag vornehmlich im Kopf. Für schwierigere Aufgaben nimmt man den Taschenrechner, aber den zückt kaum jemand, der gerade eine Nährwerttabelle liest, einer Rede lauscht oder Verkaufszahlen vorgelegt bekommt. In solchen Situationen braucht man nur einen guten Überschlagswert, wie hoch das Ergebnis denn ungefähr ausfallen sollte. Die in der Schule gelehrten Methoden funktionieren mit Zettel und Stift prima, stören beim Kopfrechnen aber eher.

Ich könnte ein ganzes Buch darüber schreiben, wie man schnell im Kopf rechnet, aber hier folgen erst einmal nur meine wichtigsten Regeln. Mein wichtigster Rat, den ich gar nicht oft genug wiederholen kann, lautet: *von links nach rechts* rechnen. Kopfrechnen ist ein Prozess stetiger Vereinfachung. Man geht von einer schwierigen Aufgabe aus und bricht sie so lange in immer einfachere Aufgaben herunter, bis man schließlich die Lösung bekommt.

## Addition im Kopf

Betrachten Sie folgende Aufgabe:

$$314 + 159$$

(Ich schreibe die Zahlen waagrecht nebeneinander, damit Sie nicht in Versuchung kommen, die Methode der schriftlichen Addition anzuwenden.) Von der 314 ausgehend, addieren wir 100 und bekommen folgende einfachere Aufgabe:

$$414 + 59$$

Wir addieren 50 und bekommen eine noch einfachere Aufgabe, die wir sofort lösen können:

$$464 + 9 = 473$$

So geht Addition im Kopf. Es gibt eine einzige weitere Strategie, die hin und wieder nützlich ist, wenn man eine schwierige Addition in eine einfache Subtraktion verwandeln kann. Zum Beispiel beim Zusammenrechnen von Preisen im Laden:

$$23{,}58\ € + 8{,}95\ €$$

Da 8,95 € nur 5 Cent unter 9 € liegt, addieren wir erst 9 € zu 23,58 € und ziehen dann 5 Cent wieder ab. Die Aufgabe vereinfacht sich zu:

$$32{,}58\ € - 0{,}05\ € = 32{,}53\ €$$

## Subtraktion im Kopf

Das wichtigste Konzept bei der Subtraktion im Kopf ist die Strategie des Zu-viel-Wegnehmens. Anstatt 9 abzuziehen, ist es oft leichter, 10 abzuziehen und dann wieder 1 hinzuzuzählen. Beispielsweise:

$$83 - 9 = 83 - 10 + 1 = 74$$

Analog ist es wahrscheinlich einfacher, statt 39 gleich 40 abzuziehen und dann wieder 1 zu addieren.

$$83 - 39 = 83 - 40 + 1 = 44$$

Bei der Subtraktion von Zahlen mit zwei oder mehr Stellen liegt der Schlüssel darin, mit *Komplementen* zu arbeiten (dafür werden Sie mir später Komplimente machen). Das Komplement zu einer Zahl ist ihre Entfernung zur nächsthöheren runden Zahl. Bei einstelligen Zahlen ist das die Entfernung zu 10. Bei zweistelligen die Entfernung zu 100. Betrachten Sie folgende Zahlenpaare, die sich zu 100 addieren. Was fällt Ihnen auf?

$$\begin{array}{r} 87 \\ +\ 13 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 75 \\ +\ 25 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56 \\ +\ 44 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 92 \\ +\ 08 \\ \hline 100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 80 \\ +\ 20 \\ \hline 100 \end{array}$$

Komplementäre zweistellige Zahlen
addieren sich zu 100.

Wir können sagen, 13 ist das Komplement von 87, 25 das Komplement von 75 usw. Umgekehrt ist 87 das Komplement von 13 und 75 das Komplement von 25. Liest man alle obigen Berechnungen von links nach rechts, sieht man, dass die Ziffern ganz links sich – abgesehen von der letzten Summe – zu 9 addieren und die Ziffern rechts zu 10. Beispielsweise summieren sich beim ersten Zahlenpaar die jeweils ersten Ziffern, 8 und 1, zu 9, und die Einer-Ziffern, 7 und 3, zu 10. Die Ausnahme ist, wenn beide Zahlen auf 0 enden (wie beim letzten Komplement). Beispielsweise ist 20 das Komplement von 80.

Wenden wir diese Komplement-Strategie nun auf die Aufgabe 1234 – 567 an. Mit Zettel und Stift müsste man sich schon ziemlich plagen. *Aber mit Komplementen werden schwierige Subtraktionen zu einfachen Additionen!* Anstatt 567 abzuziehen, ziehen wir 600 ab. Das ist ganz einfach, insbesondere, wenn man von links nach rechts denkt. 1234 – 600 = 634. Aber wir haben zu viel abgezogen. Um wie viel zu viel? Nun, wie weit ist 567 von 600 entfernt? Genauso weit wie 67 von 100, also 33. Also

$$1234 - 567 = 1234 - 600 + 33 = 667$$

Beachten Sie, dass die Addition besonders einfach ist, weil man nicht mit „1 gemerkt“ oder so operieren muss. Das ist oft der Fall, wenn man mithilfe von Komplementen subtrahiert.

Etwas Ähnliches passiert mit dreistelligen Komplementen:

$$\begin{array}{r} 789 \\ +\quad 211 \\ \hline 1000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 555 \\ +\quad 445 \\ \hline 1000 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 870 \\ +\quad 130 \\ \hline 1000 \end{array}$$

Komplementäre dreistellige Zahlen summieren sich zu 1000.

Bei den meisten Aufgaben (wenn die Zahl nicht auf 0 endet) summieren sich die korrespondierenden Ziffern zu 9, bis auf das letzte Zahlenpaar, das sich zu 10 summiert. Bei 789 beispielsweise gilt 7 + 2 = 9, 8 + 1 = 9 und 9 + 1 = 0. Das ist ganz praktisch, wenn man Wechselgeld berechnen muss. Mein Lieblingssandwich im örtlichen Delikatessenladen kostet 6,76 €. Wie viel Wechselgeld bekomme ich auf einen Zehner? Die Lösung findet man, indem man das Komplement zu 676 nimmt, nämlich 324. Ich sollte also 3,24 € zurückbekommen.

**Nebenbemerkung**
Jedes Mal, wenn ich dieses Sandwich kaufe, springt mir wieder ins Auge, dass sowohl der Preis als auch die Wechselgeldsumme auf einen Zehner Quadrate sind ($26^2 = 676$ und $18^2 = 324$). Bonusfrage: Es gibt ein weiteres Paar von Quadratzahlen, die zusammen 1000 ergeben. Welches?

## Multiplikation im Kopf

Wer das kleine Einmaleins (eine Aufstellung folgt weiter hinten im Kapitel) beherrscht, kann jede Multiplikation im Kopf machen (oder zumindest zu einem guten Schätzwert kommen). Fangen wir mit Aufgaben an, wo einstellige Zahlen mit zweistelligen multipliziert werden (die Ergebnisse muss man aber nicht auswendig lernen). Wieder ist es das A und O, von links nach rechts vorzugehen. Bei der Multiplikation von $8 \times 24$ sollte man zunächst $8 \times 20$ rechnen und dann $8 \times 4$ hinzuzählen:

$$8 \times 24 = (8 \times 20) + (8 \times 4) = 160 + 32 = 192$$

Sobald man das beherrscht, kann man sich an die Multiplikation von einstelligen Zahlen mit Dreistelligen wagen. Aufgaben dieser Art sind deswegen etwas schwieriger, weil man sich mehr merken muss. Der Schlüssel besteht hier darin, die Zahlen während des Rechnens sukzessive einzubeziehen, sodass man sich weniger merken muss. Will man beispielsweise $456 \times 7$ rechnen, hält man zwischendurch inne, um 2800 und 350 zu addieren, und fügt erst dann 42 hinzu.

$$\begin{array}{rr}
 & 456 \\
 & \times \quad 7 \\
\hline
400 \times 7 = & 2800 \\
50 \times 7 = & +\ 350 \\
\hline
 & 3150 \\
6 \times 7 = & +\ \ 42 \\
\hline
 & 3192
\end{array}$$

Sobald Sie bei dieser Art Aufgabe den Bogen heraus haben, wird es Zeit, sich der Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen zuzuwenden. Für mich beginnt hier der Spaß, weil sich solche Aufgaben auf vielerlei Weise angehen lassen. Rechnet man auf mehrere verschiedene Arten, kann man seine Lösung gleich überprüfen – und sich an der Stimmigkeit der Mathematik erfreuen. Ich werde alle Herangehensweisen an demselben Beispiel illustrieren: $32 \times 38$.

Am vertrautesten (weil so ähnlich aus der schriftlichen Multiplikation bekannt) wirkt die *Additionsmethode*, die sich auf jede Aufgabe anwenden lässt. Dabei teilen wir eine Zahl (normalerweise die mit der kleineren Ziffer an der Einerstelle) in zwei Teile, multiplizieren beide mit der anderen Zahl und addieren die Ergebnisse zusammen. Zum Beispiel:

$$32 \times 38 = (30 + 2) \times 38 = (30 \times 38) + (2 \times 38) = \ldots$$

Wie berechnen wir nun $30 \times 38$? Rechnen wir $3 \times 38$ und hängen hinten eine 0 an. $3 \times 38 = 90 + 24 = 114$, also ist $30 \times 38 = 1140$. Dazu kommt $2 \times 38 = 60 + 16 = 76$, also

$$32 \times 38 = (30 \times 38) + (2 \times 38) = 1140 + 76 = 1216$$

Eine andere Art, diese Aufgabe zu lösen, wäre die *Subtraktionsmethode* (typischerweise hilfreich, wenn eine der Zahlen auf 7, 8 oder 9 endet). Hier nutzen wir den Umstand, dass $38 = 40 – 2$ und erhalten

$$38 \times 32 = (40 \times 32) – (2 \times 32) =1280 – 64 = 1216$$

An beiden Methoden ist allerdings knifflig, dass man sich große Zahlen (wie 1140 und 1280) merken muss, während man eine weitere Berechnung durchführt. Das kann schwierig sein. Deswegen verwende ich am liebsten die Faktorisierungsmethode, die immer funktioniert, wenn sich eine der Zahlen als Produkt zweier einstelliger Zahlen darstellen lässt. In unserem Beispiel kann man 32 in $8 \times 4$ zerlegen. Es folgt

$$38 \times 32 = 38 \times 8 \times 4 = 304 \times 4 = 1216$$

Wir hätten die 32 auch in 4 x 8 zerlegen, also $38 \times 4 \times 8 = 152 \times 8 = 1216$ rechnen können, aber ich mache lieber zuerst die Multiplikation mit dem größeren Faktor, damit das Ergebnis (typischerweise eine dreistellige Zahl) nur noch mit einem kleineren Faktor multipliziert werden muss.

**Nebenbemerkung**
Die Faktorisierungsmethode funktioniert auch bei Vielfachen von 11 gut: *einfach die Ziffern addieren und das Ergebnis zwischen die Ziffern schreiben*: Bei $53 \times 11$ wissen wir, dass $5 + 3 = 8$, die Lösung lautet also 583. Wie viel ergibt $27 \times 11$? Da $2 + 7 = 9$, lautet die Lösung 297. Was, wenn die Summe der zwei Ziffern größer ist als 9? In diesem Fall fügen wir die letzte Ziffer der Summe ein und erhöhen die erste Ziffer um 1. Um $48 \times 11$ zu berechnen, addiert man $4 + 8 = 12$, fügt die 2 in der Mitte ein und erhöht die 4 um 1: Die Lösung lautet 528. Analog ist $74 \times 11 = 814$. Dieser Umstand lässt sich ausnützen, wenn man mit Zahlen multipliziert, die ein Vielfaches von 11 sind, zum Beispiel:

$$74 \times 33 = 74 \times 11 \times 3 = 814 \times 3 = 2442$$

Eine weitere nette Methode zur Multiplikation zweier zweistelliger Zahlen ist die Nahe-beieinander-Methode. Sie können sie verwenden, wenn beide Zahlen mit derselben Ziffer beginnen. Wenn man sie zum ersten Mal angewendet sieht, wirkt sie wie pure Magie. Wir behaupten jetzt einfach, dass

$$38 \times 32 = (30 \times 40) + (8 \times 2) = 1200 + 16 = 1216$$

Die Berechnung ist besonders einfach, wenn sich (wie im obigen Fall) die Einerstellen zu 10 addieren. (Hier beginnen beide Zahlen mit 3, und die hinteren Stellen ergeben $8 + 2 = 10$.) Hier ein weiteres Beispiel:

$$83 \times 87 = (80 \times 90) + (3 \times 7) = 7200 + 21 = 7221$$

Selbst wenn sich die hinteren Stellen nicht zu 10 summieren, ist die Berechnung fast ebenso einfach. Um etwa $41 \times 44$ zu rechnen, zieht man von der kleineren Zahl 1 ab (um auf die runde 40 zu kommen) und erhöht die andere um 1.

$$41 \times 44 = (40 \times 45) + (1 \times 4) = 1800 + 4 = 1804$$

Um 34 × 37 zu berechnen, zieht man von 34 4 ab (um die runde 30 zu erreichen) und multipliziert mit 37 + 4 = 41 und zählt dazu wie folgt 4 × 7 dazu:

$$34 \times 37 = (30 \times 41) + (4 \times 7) = 1230 + 28 = 1258$$

Übrigens haben wir bei der mysteriösen Multiplikation von 104 × 109 weiter oben genau diese Methode angewendet.

$$104 \times 109 = (100 \times 113) + (4 \times 9) = 11.300 + 36 = 11.336$$

In manchen Schulen müssen die Kinder die Multiplikationstabelle der Zahlen bis 20 auswendig lernen. Doch eigentlich bräuchten wir uns die Produkte der Zahlen zwischen 10 und 20 gar nicht zu merken, weil man sie mit unserer Methode ganz schnell im Kopf ermittelt, beispielsweise:

$$17 \times 18 = (10 \times 25) + (7 \times 8) = 250 + 56 = 306$$

Warum funktioniert diese merkwürdige Methode? Dafür brauchen wir Algebra, die ich Ihnen im Kapitel 2 vorstelle. Wenn wir erst die Algebra beherrschen, können wir weitere Berechnungsmethoden finden. Beispielsweise erfahren wir, warum sich obige Aufgabe auch so lösen lässt:

$$18 \times 17 = (20 \times 15) + ((-2) \times (-3)) = 300 + 6 = 306$$

Da wir schon bei Multiplikationstabellen sind, sehen Sie sich die Tabelle mit dem kleinen Einmaleins an, die ich Ihnen zuvor versprochen habe. Hier eine Aufgabe, die dem jungen Gauss gefallen hätte: Was ist die Summe aller Zahlen in der Tabelle? Nehmen Sie sich eine Minute und schauen Sie, ob Sie eine elegante Lösungsmethode finden. Das korrekte Ergebnis finden Sie am Ende des Kapitels.

## Schätzung und Division im Kopf

Beginnen wir mit einer ganz einfachen Frage und einer ganz einfachen Antwort, die man kaum je in der Schule lernt:

(a) Kann man bei der Multiplikation zweier dreistelliger Zahlen sofort sagen, wie viele Stellen das Ergebnis haben muss?

Und eine Folgefrage:

(b) Wie viele Stellen kann das Ergebnis haben, wenn man eine vier- und eine fünfstellige Zahl miteinander multipliziert?

In der Schule quälen wir uns ewig damit ab, die einzelnen Ziffern in Multiplikations- oder Divisionsaufgaben zu errechnen, aber vorher überschlagen wir nie, wie groß das Ergebnis denn ungefähr sein muss. Dabei ist es doch viel wichtiger, die Größenordnung des Ergebnisses zu kennen, als die letzten oder ersten Ziffern der Zahl. (Das Wissen, dass das Ergebnis mit einer 3 beginnt, ist bedeutungslos, solange man nicht weiß, ob es irgendwo bei 30.000, 300.000 oder 3.000.000 liegt.) Die Antwort auf die erste Frage lautet: fünf oder sechs Stellen. Wieso? Das kleinste mögliche Ergebnis ist $100 \times 100 = 10.000$, was 5 Stellen hat. Die größte mögliche Zahl ist $999 \times 999$, was kleiner ist als $1000 \times 1000 = 1.000.000$, was (gerade eben) sieben Stellen hat. Da $999 \times 999$ kleiner ist, muss das Ergebnis sechs Stellen haben. (Natürlich könnten Sie die Multiplikation schnell im Kopf durchführen: $999^2 = (1000 \times 998) + 1^2 = 998.001$.) Folglich muss das Produkt zweier dreistelliger Zahlen fünf oder sechs Stellen haben.

| × | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 2 | 2 | 4 | 6 | 8 | 10 | 12 | 14 | 16 | 18 | 20 |
| 3 | 3 | 6 | 9 | 12 | 15 | 18 | 21 | 24 | 27 | 30 |
| 4 | 4 | 8 | 12 | 16 | 20 | 24 | 28 | 32 | 36 | 40 |
| 5 | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | 50 |
| 6 | 6 | 12 | 18 | 24 | 30 | 36 | 42 | 48 | 54 | 60 |
| 7 | 7 | 14 | 21 | 28 | 35 | 42 | 47 | 56 | 63 | 70 |
| 8 | 8 | 16 | 24 | 32 | 40 | 48 | 56 | 64 | 72 | 80 |
| 9 | 9 | 18 | 27 | 36 | 45 | 54 | 63 | 72 | 81 | 90 |
| 10 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 | 90 | 100 |

Was ist die Summe aller Zahlen in der Multiplikationstabelle?

Die Antwort auf die zweite Frage lautet: acht oder neun Stellen. Warum? Die kleinste vierstellige Zahl ist 1000 alias $10^3$ (eine 1, gefolgt von 3 Nullen). Die kleinste fünfstellige Zahl ist $10.000 = 10^4$. Das kleinste Produkt ist also $10^3 \times 10^4 = 10^7$, was 8 Stellen hat. (Wo kommt $10^7$ her? $10^3 \times 10^4 = (10 \times 10 \times 10) \times (10 \times 10 \times 10 \times 10) = 10^7$.) Und das größte Produkt wird nur um Haaresbreite unter $10^4$ x $10^5 = 10^9$ liegen, die Lösung hat also maximal neun Stellen.

Daraus können wir eine ganz einfache Regel ableiten: **Eine *m*-stellige Zahl mal einer *n*-stelligen Zahl ergibt ein Produkt mit $m + n$ oder $m + n - 1$ Stellen.**

Normalerweise kann man an den ersten (vordersten) Ziffern der beiden Zahlen schnell ablesen, wie viele Stellen das Produkt haben wird. Liegt das Produkt dieser beiden Zahlen bei 10 oder darüber, hat das Produkt garantiert $m + n$ Stellen. Liegt das Produkt der ersten beiden Zahlen bei 4 oder darunter, wird das Ergebnis $m + n - 1$ Stellen haben. Ist das Produkt der beiden Zahlen 5, 6, 7, 8 oder 9, muss man genauer hinsehen. 222 × 444 etwa hat fünf Stellen, 234 × 456 aber sechs Stellen. (Beide Ergebnisse liegen sehr nahe bei 100.000, das erste allerdings darunter und das zweite darüber, und genau darauf kommt es wirklich an.)

Indem wir die Regel umkehren, bekommen wir eine noch einfachere Regel für die Division: **Eine *m*-stellige Zahl geteilt durch eine *n*-stellige Zahl hat $m - n$ oder $m - n + 1$ Stellen.**

Eine neunstellige Zahl geteilt durch eine fünfstellige muss also eine vier- oder fünfstellige Zahl ergeben. Die Regel dafür, wie viele Stellen es nun genau sein müssen, ist sogar noch einfacher als bei der Multiplikation: Anstatt die ersten Ziffern zu multiplizieren oder zu dividieren, *vergleichen* wir sie einfach. Ist die erste Ziffer der zu teilenden Zahl kleiner als die erste Ziffer der Zahl, durch die geteilt wird, sind wir bei der kleineren Variante ($m - n$). Ist die erste Ziffer der zu teilenden Zahl größer als die erste Ziffer der Zahl, durch die geteilt wird, sind wir bei der größeren Variante ($m - n + 1$). Sind die ersten Ziffern gleich groß, sehen wir uns die zweiten Ziffern an, wobei die gleiche Regel gilt. Teilt man beispielsweise 314.159.265 durch 12.358, hat das Ergebnis fünf Stellen, weil die erste Ziffer des Dividenden, also der Zahl, die geteilt wird, größer ist als die erste Ziffer des Divisors, also der Zahl, durch die geteilt wird. Teilen wir jedoch durch 62.831, hat das Ergebnis vier Stellen, weil hier die erste Ziffer des Dividenden kleiner ist als die erste Ziffer des Divisors. Die Division von 161.803.398 durch 14.142 wird zu einem fünfstelligen Ergebnis führen, weil 16 größer ist als 14.

Darüber hinaus will ich auf Divisionen im Kopf nicht näher eingehen, weil die Methode derjenigen der schriftlichen Division ähnelt. (Da man auch bei der Division mit Zettel und Stift von links nach rechts vorgeht.) Aber es gibt einige Abkürzungen, die sich gelegentlich als nützlich erweisen.

Teilt man durch 5 (oder irgendeine Zahl, die auf 5 endet), macht man sich in aller Regel das Leben einfacher, wenn man Zähler und Nenner verdoppelt. Beispiele:

$$34 \div 5 = 68 \div 10 = 6.8$$

$$123 \div 4.5 = 246 \div 9 = 82 \div 3 = 27{,}333.$$

Nach dem Verdoppeln beider Zahlen ist Ihnen vielleicht aufgefallen, dass sich sowohl 246 als auch 9 durch 3 teilen lassen (mehr dazu in Kapitel 3), also können wir weiter vereinfachen, indem wir beide Zahlen durch 3 teilen.

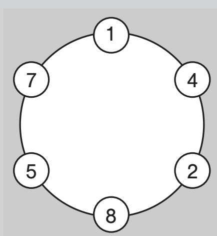
**Nebenbemerkung**
Betrachten Sie die Kehrwerte der Zahlen von 1 bis 10:

1/2 = 0,5, 1/3 = 0,333..., 1/4 = 0,25, 1/5 = 0,2,
1/6 = 0,1666..., 1/8 = 0,125, 1/9 = 0,111..., 1/10 = 0,1

All diese Werte haben maximal zwei Stellen hinter dem Komma oder wiederholen sich spätestens nach der zweiten Nachkommastelle. Doch es gibt eine seltsame Ausnahme: 1/7, das sich erst nach sechs Dezimalstellen wiederholt:

1/7 = 0,142857 142857...

(Der Grund, warum die anderen Werte so glatt sind: Alle anderen Zahlen zwischen 2 und 11 passen glatt in 10, 100, 1000, 9, 90 oder 99, doch die erste hübsche Zahl, in die 7 passt, ist 999.999. Schreibt man die Nachkommastellen von 1/7 in einem Kreis hin, passiert etwas Magisches:




Der siebte Kreis

Bemerkenswert daran ist, dass alle anderen Brüche mit Nenner 7 auch ermittelt werden können, indem man von der richtigen Stelle im Kreis beginnend ewig im Kreis herumläuft. Und zwar:

1/7 = 0,142857 142857 ... 2/7 = 0,285714 285714...
3/7 = 0,428571 428571 ... 4/7 = 0,571428 571428...
5/7 = 0,714285 714285 ... 6/7 = 0,857142 857142...

Beenden wir dieses Kapitel mit der Aufgabe, die ich vor einigen Seiten gestellt habe. Was ist die Summe aller Zahlen in der Multiplikationstabelle? Auf den ersten Blick scheint die Aufgabe erschreckend, ebenso wie das Zusammenzählen der ersten hundert Zahlen aufwendig erschienen sein mag. Doch wenn wir uns die Muster zu Freunden machen, die erscheinen, wenn die Zahlen zu tanzen beginnen, haben wir eine bessere Chance, eine elegante Lösung für diese Aufgabe zu finden.

Wir beginnen mit der Addition der Zahlen in der ersten Zeile. Dank Gauss (oder unserer Dreiecks-Zahlenformel oder einfacher Addition) wissen wir, dass

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55$$

Was ist die Summe der zweiten Zeile? Nun, ganz einfach

$$2 + 4 + 6 + \ldots + 20 = 2\,(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) = 2 \times 55$$

Nach derselben Logik ergibt die dritte Zeile $3 \times 55$. Setzen wir diese Logik fort, zeigt sich, dass die Summe all dieser Zahlen

$$(1 + 2 + 3 + \ldots + 10) \times 55 = 55 \times 55 = 55^2$$

Und das sollten Sie mittlerweile im Kopf rechnen können: 3025!

## Kapitel zwei

$2n + 4 / 2 \{ n = 2$

# Die Magie der Algebra

### Magische Einleitung

Zum ersten Mal begegnete ich der Algebra als Kind, über meinen Vater. Er sagte: „Sohn, Algebra ist wie Rechnen, nur dass man Zahlen durch Buchstaben ersetzt. Beispielsweise $2x + 3x = 5x$ oder $3y + 6y = 9y$. Verstanden?“ Ich antwortete: „Ich glaube.“ Er fragte: „Okay, was ist dann $5Q + 5Q$?“ Stolz sagte ich: „10Q.“ Er sagte: „Ich habe dich nicht gehört! Wiederholst du das lauter?“ Also rief ich: „10Q!“ Und er antwortete: „Gern geschehen!“ („10Q“ klingt im Englischen so ähnlich wie *thank you*, also „Danke“ – mein Vater interessierte sich immer mehr für Witze, Wortspiele und Geschichten als dafür, mir Mathematik beizubringen. Ich hätte also gewarnt sein sollen.)

Meine zweite Erfahrung mit Algebra machte ich beim Versuch, folgenden Zaubertrick zu verstehen.

Schritt 1. Wählen Sie eine Zahl zwischen 1 und 10 (sie darf aber auch größer sein, wenn Sie wollen).
Schritt 2. Verdoppeln Sie diese Zahl.
Schritt 3. Zählen Sie 10 dazu.
Schritt 4. Teilen Sie sie durch 2.
Schritt 5. Ziehen Sie davon jetzt die Zahl ab, die Sie am Anfang gewählt haben.

Ich wette, das Ergebnis lautet 5. Stimmt’s?

Welches Geheimnis steckt hinter diesem Trick? Gehen wir ihn von Anfang an Schritt für Schritt durch. Ich weiß nicht, welche Zahl Sie gewählt haben, also nehmen wir den Platzhalter $N$. Wenn wir einen Buchstaben verwenden, um eine unbekannte Zahl darzustellen, nennen wir diesen Buchstaben eine *Variable*.

Im zweiten Schritt verdoppeln Sie die Zahl, Sie erhalten also $2N$. (Das Multiplikationszeichen dazwischen lassen wir in aller Regel weg, vor allem, um Verwechslungen mit der Variablen $x$ zu vermeiden.) Nach Schritt 3 hat man $2N + 10$. Bei Schritt 4 teilt man das Ganze durch 2 und erhält $N + 5$. Am Ende zieht man die Ausgangszahl ab, also $N$. Was bleibt? $N + 5 - N$, *macht* 5. Wir fassen das Ganze in der folgenden Tabelle zusammen:

| | |
|---|---|
| Schritt 1: | N |
| Schritt 2: | 2N |
| Schritt 3: | 2N + 10 |
| Schritt 4: | N + 5 |
| Schritt 5: | N + 5 −N |
| Ergebnis: | 5 |

## Regeln der Algebra

Beginnen wir mit einem Rätsel. Finden Sie eine Zahl, die sich verdreifacht, wenn man 5 hinzuzählt. Zur Lösung des Rätsels nennen wir die unbekannte Zahl $x$. Zählt man 5 zu dieser Zahl, bekommt man $x + 5$. Das Dreifache der Ausgangszahl heißt $3x$. Diese zwei Werte sollen gleich sein, also bekommen wir die Gleichung

$$3x = x + 5$$

Zieht man auf beiden Seiten X ab, bekommt man

$$2x = 5$$

(Wo kommt das $2x$ *her*? $3x - x$ *ist das Gleiche wie* $3x - 1x$, was $2x$ *ist.*) Teilt man beide Seiten der Gleichung durch 2, bekommt man

$$x = 5/2 = 2.5$$

Wir können überprüfen, ob unsere Lösung stimmt: 2,5 + 5 = 7,5, was 3 mal 2,5 entspricht.

**Nebenbemerkung**
Hier ein weiterer Trick, der sich mithilfe von Algebra erklären lässt. Schreiben Sie eine beliebige dreistellige Zahl hin, deren Ziffern von links nach rechts immer kleiner werden, z. B. 842 oder 951. Dann drehen Sie diese Zahl um und ziehen sie von der Ausgangszahl ab. Nehmen Sie das Ergebnis, drehen Sie auch diese Zahl wieder um und zählen Sie die beiden Zahlen zusammen. Machen wir das Ganze einmal am Beispiel der Zahl 853.

$$\begin{array}{r} 853 \\ -\ 358 \\ \hline 495 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 495 \\ +\ 594 \\ \hline 1089 \end{array}$$

Machen Sie dasselbe mit einer anderen Ausgangszahl. Was bekommen Sie? Solange Sie alles richtig machen, landen Sie erstaunlicherweise immer bei 1089!
Wie gibt es das? Algebra, hilf! Angenommen, wir beginnen mit der dreistelligen Zahl *abc mit* $a > b > c$. So wie die Zahl 853 = (8×100) + (5×10) + 3, hat die Zahl *abc den Wert* $100a + 10b + c$. Drehen wir die Reihenfolge um, bekommen wir ihre sog. *Spiegelzahl cba*, mit dem Wert $100c + 10b + a$. Ziehen wir die beiden Zahlen voneinander ab, bekommen wir

$$\begin{aligned}&(100a + 10b + c) - (100c + 10b + a)\\ &= (100a - a) + (10b - 10b) + (c - 100c)\\ &= 99a - 99c = 99(a - c)\end{aligned}$$

Anders ausgedrückt: Die Differenz muss ein Vielfaches von 99 sein. Da die Ziffern der Ausgangszahl von links nach rechts absteigen, muss *$a - c$ mindestens 2 sein*, also 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 oder 9. Nach der Subtraktion müssen wir also eine der folgenden Zahlen bekommen:

198, 297, 396, 495, 594, 693, 792 oder 891

In all diesen Fällen passiert dasselbe, wenn wir die Zahl und ihre Spiegelzahl zusammenzählen:

$$198 + 891 = 297 + 792 = 396 + 693 = 495 + 594 = 1089$$

Wir müssen also immer bei 1089 herauskommen.

Das war gerade ein Beispiel für das, was ich die **Goldene Regel der Algebra** nenne: **Tu einer Seite immer genau das an, was du der anderen antust.**

Angenommen, Sie wollen die folgende Gleichung nach $x$ auflösen:

$$3(2x + 10) = 90$$

Unser Ziel besteht darin, $x$ zu isolieren. Beginnen wir, indem wir beide Seiten durch 3 teilen. Die Gleichung vereinfacht sich zu:

$$2x + 10 = 30$$

Die 10 werden wir los, indem wir sie auf beiden Seiten abziehen. Wenn wir das tun, bekommen wir

$$2x = 20$$

Schließlich teilen wir beide Seiten durch 2, und es bleibt

$$x = 10$$

Es kann nie schaden, Ergebnisse zu überprüfen. Hier sehen wir: Wenn $x = 10$, dann ist $3(2x + 10) = 3(30) = 90$, wie gewünscht. Gibt es noch andere Lösungen für diese Gleichung? Nein, denn diese Werte für $x$ müssten auch die anderen Gleichungen erfüllen, also ist $x = 10$ die einzige Lösung.

Aber wann braucht man Algebra schon im Alltag? Hier ein Problem, das sich einem Journalisten der *New York Times* im Jahr 2014 stellte. Sony ließ melden, dass der Film *The Interview* in den ersten 4 Tagen nach Erscheinen im Internet 15 Millionen Dollar eingespielt habe. Allerdings verriet das Filmstudio nicht, wie oft der Film online verkauft (zu 15 Dollar) bzw. vermietet (zu 6 Dollar) wurde. Nur, dass es insgesamt 2 Millionen Internettransaktionen gegeben habe. Wie kam der Reporter nun auf die Zahl der Verkäufe? Nennen wir die Zahl der Online-Verkäufe $V$ und die Zahl der Online-Mieten $M$. Da es 2 Millionen Online-Transaktionen gab, wissen wir

$$V + M = 2.000.000$$

Da ein Verkauf mit 15 \$ zu Buche schlägt und eine Miete mit 6 \$, lautet die Gleichung zum Gesamtumsatz

$$15V + 6M = 15.000.000$$

Formt man die erste Gleichung um, erhält man $M = 2.000.000 - V$. Das setzen wir in die zweite Gleichung ein, d. h. anstatt $M$ schreiben wir $(2.000.000 - V)$ und erhalten

$$15V + 6(2.000.000 - V) = 15.000.000$$

oder, umgeformt, $15V + 12.000.000 – 6V = 15.000.000$. Jetzt haben wir es nur noch mit einer Variablen zu tun. Wir verkürzen das Ganze zu

$$9V + 12.000.000 = 15.000.000$$

Zieht man 12.000.000 auf beiden Seiten ab, erhält man

$$9V = 3.000.000$$

folglich liegen die Verkäufe, V, bei genau einer Drittelmillion. V ≈ 333.333, folglich liegt die Anzahl der Online gemieteten Filme, M, bei 2.000.000 − V ≈ 1.666.667. (Überprüfung des Ergebnisses: Der Gesamtumsatz liegt bei $15(333.333) + $6(1.666.667) ≈ $15.000.000.)

An dieser Stelle muss ich über ein Gesetz reden, das wir im Buch bereits mehrfach angewendet haben, ohne es explizit beim Namen zu nennen: das **Distributivgesetz**. Dieses Gesetz sorgt dafür, dass Addition und Multiplikation gut zusammenarbeiten. Das Distributivgesetz besagt, dass für beliebige Zahlen $a$, $b$, $c$ gilt

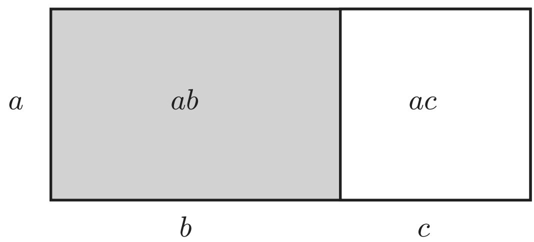
$$a(b + c) = ab + ac$$

Nach diesem Schema multiplizieren wir einstellige und zweistellige Zahlen miteinander, beispielsweise

$$7 \times 28 = 7 \times (20 + 8) = (7 \times 20) + (7 \times 8) = 140 + 56 = 196$$

Die Logik dahinter ist ganz einfach. Angenommen, ich habe 7 Säcke mit Münzen, in denen sich jeweils 20 Gold- und 8 Silbermünzen befinden. Wie viele Münzen habe ich insgesamt? Das kann ich entweder so rechnen: Jeder Sack enthält 28 Münzen, also habe ich 7 × 28 Münzen. Oder ich rechne so: Ich habe 7 × 20 Goldmünzen und 7 × 8 Silbermünzen, also (7 × 20) + (7 × 8) Münzen insgesamt. Folglich ist 7 × 28 = (7 × 20) + (7 × 8) = 196.

Man kann sich das Distributivgesetz auch geometrisch veranschaulichen, indem man die Fläche eines Rechtecks auf zweierlei Weise betrachtet, wie unten gezeigt.




Das Rechteck illustriert das Distributivgesetz:
$a(b + c) = ab + ac$

Einerseits ist die Fläche des Rechtecks $a(b + c)$. Aber die linke Seite des Rechtecks hat die Fläche $ab$ und die rechte die Fläche $ac$, die Gesamtfläche ist also auch $ab + ac$. Damit lässt sich das Distributivgesetz für alle positiven Zahlen $a$, $b$, $c$ veranschaulichen. Übrigens wenden wir das Distributivgesetz gelegentlich auf Zahlen und Variablen gleichzeitig an, beispielsweise bei

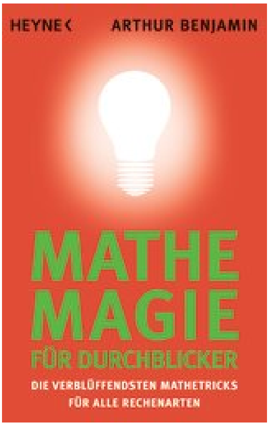
$$3(2x + 7) = 6x + 21$$

Liest man diese Gleichung von links nach rechts, kann man sie als Multiplikation von $2x + 7$ mit 3 interpretieren. Liest man sie von rechts nach links, könnte man davon sprechen, dass wir aus $6x + 21$ die „3 ausgeklammert“ haben.

**Nebenbemerkung**
Warum ergibt eine negative Zahl mal eine negative Zahl etwas Positives? Warum gilt beispielsweise $(-5) \times (-7) = 35$? Lehrer versuchen, das auf verschiedenste Arten zu erklären, etwa mit dem Zurückzahlen von Schulden, oder

HEYNE

UNVERKÄUFLICHE LESEPROBE




Arthur Benjamin

**Mathe-Magie für Durchblicker**

Die verblüffendsten Mathetricks für alle Rechenarten

DEUTSCHE ERSTAUSGABE

Taschenbuch, Broschur, 400 Seiten, 11,8 x 18,7 cm
10 s/w Abbildungen
ISBN: 978-3-453-60393-6

Heyne

Erscheinungstermin: September 2016

Adam Riese war gestern – heute ist Arthur Benjamin!

Wären Zahlen doch nur immer so zauberhaft gewesen! Der Mathematikprofessor und Bestsellerautor Arthur Benjamin lädt zu einer faszinierenden Reise durch alle Gebiete der Mathematik ein. Mit dabei sind die erstaunlichen Eigenschaften der Zahl 9, die verblüffende Unendlichkeit von Pi sowie jede Menge fabelhafte Tricks und wunderbare Kniffe – für jeden Leser zwischen 11 und #.

Der Titel im Katalog